



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Svingningsundersøgelse af Jernbetonbjælker

Laboratorieforsøg

Hansen, Lars Pilegaard

Publication date:
1980

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Hansen, L. P. (1980). *Svingningsundersøgelse af Jernbetonbjælker: Laboratorieforsøg*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING

AALBORG UNIVERSITETSCENTER · AUC · AALBORG · DANMARK

Fremlagt på

NORDISK BETONGFORSKNINGSSEMINAR - DYNAMISK PAKJENTE KONSTRUKSJONER
TRONDHEIM, 21. april 1980

L. PILEGAARD HANSEN

SVINGNINGSUNDERSØGELSE AF JERNBETONBJÆLKER
APRIL 1980

LABORATORIEFORSØG

IFB/A 8001

SVINGNINGSUNDERSØGELSE AF JERNBETONBJÆLKER
LABORATORIEFORSØG

L. Pilegaard Hansen
Instituttet for Bygningsteknik
Aalborg Universitetscenter, Postbox 159, DK 9100 Aalborg

1. INDLEDNING

Ved Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter, Danmark udføres for tiden svingningsundersøgelser af jernbetonbjælker.

Projektet blev påbegyndt i slutningen af 1978 og indgår som delprojekt i et større og mere generelt forskningsprojekt, som omhandler både deterministiske og stokastiske svingningsundersøgelser. Såvel teoretiske som eksperimentelle undersøgelser foretages.

De foreløbige resultater vedrørende svingningsundersøgelser i laboratoriet af jernbetonbjælker er beskrevet i to rapporter, [1] og [2], se referencefortegnelsen i kapitel 6, og nogle resultater fra disse forsøg skal kort refereres i den foreliggende rapport. Det skal bemærkes, at der er tale om indledende undersøgelser, og at projektet påtænkes videreført i de kommende år, se kapitel 5.

En gennemgang af den for forfatteren tilgængelige litteratur synes at vise, at der ikke er udført særligt mange laboratoriesvingningsforsøg med almindeligt forekommende jernbetonbjælker udsat for et svingningsniveau svarende til moderate påvirkninger (»brugsstadium»). Dog skal der her henvises til fx Bock, [3] og [4], Penzien and Hansen, [5], Lenk, [6], James, Lutes and Smith, [7], samt Dieterle und Bachmann, [8].

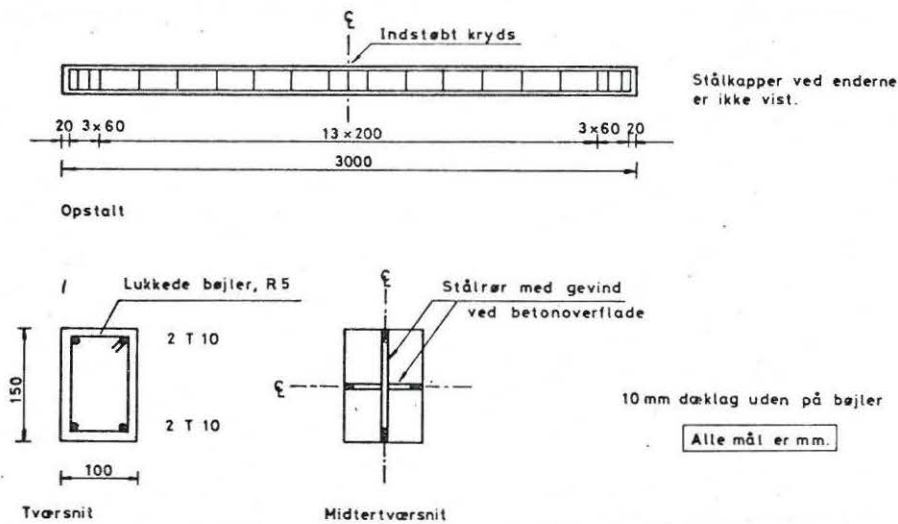
Vedrørende svingningsforsøg udført på eksisterende jernbetonkonstruktioner, forsøg med store påvirkninger samt forsøg med forspændte konstruktioner kan fx henvises til referencefortegnelsen i [9].

2. PRØVELEGEMER, FORSØGSOPSTILLING OG MÅLEAPPARATUR

De her beskrevne svingningsforsøg er udført med 3 jernbetonbjælker, benævnt bjælke 1, 2 og 3. Jernbetonbjælkernes geometriske udformning fremgår af figur 2.1, som også viser armeringen.

For enderne er bjælkerne forsynet med 100 mm lange stålklapper med tykkelse 10 mm. Disse stålklapper blev indlagt i bjælkernes stålforskalling, og stålklappens ydersider ligger således i samme planer som jernbetonbjælkernes ydersider. Disse stålklapper er nødvendige af hensyn til en tilfredsstillende placering af bjælkerne på lejekonstruktionen, se senere.

Jernbetonbjælke 1 og 2 er støbt 14.8.78 og jernbetonbjælke 3 er støbt 5.9.79. Herefter er bjælkerne vådlagret under sække indtil 2.3.79, og derefter opbevaret i laboratoriet. For jernbetonbjælke 3 gælder dog specielle forhold, se afsnit 3.1. Den relative luftfugtighed i laboratoriet varierede mellem



Figur 2.1. Jernbetonbjælke 1 - 2 - 3.

ca. 25% og ca. 70% med en gennemsnitsværdi på ca. 50%. Temperaturen var ca. 20°C.

Trykstyrken for den benyttede beton målt på 100 × 200 mm cylindre, begyndelseselasticitetsmodulen samt bøjningstrækstyrken målt på 100 × 100 × 500 mm uarmerede bjælker er angivet i tabel 2.1. Elasticitetskoefficienten er også bestemt ved ultralydmålinger. Herom henvises til [1].

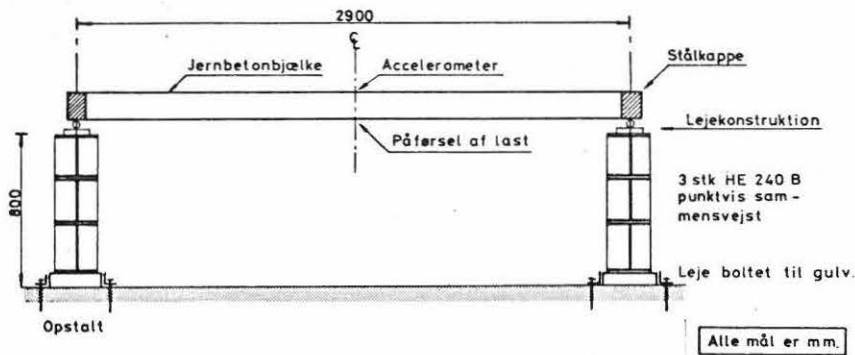
Som længdearmring er benyttet tentorstål med begyndelseselasticitetsmodul på $1,8 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ og $\sigma_{0,2} = 526 \text{ N/mm}^2$. Som bøjlearmring er benyttet St.37 med begyndelseselasticitetsmodul på $2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ og flydespænding på 323 N/mm^2 . Ovennævnte værdier er middelværdier for 3 armeringsstænger.

Den til forsøgene benyttede forsøgsopstilling er vist i figur 2.2.

Ved dynamiske forsøg spiller understøtningsforholdene en afgørende rolle. 4 forskellige lejetyper, hvoraf type 2, 3 og 4 er vist i figur 2.3, er benyttet. Ved lejetype 2 og 3 kan den nederste del af lejet ved anvendelse af 3 justeringsskruer bringes i meget nøjagtig kontakt med jernbetonbjælkernes stålkap-

	Beton benyttet til jernbetonbjælke 1	Beton benyttet til jernbetonbjælke 2	Beton benyttet til jernbetonbjælke 3
Begyndelseselasticitetsmodul. Middelværdi for 6 cylindre. Prøvetidspunkt 5.3. - 9.3.79	$4,1 \cdot 10^4$	$4,4 \cdot 10^4$	$2,9 \cdot 10^4$
Begyndelseselasticitetsmodul. Middelværdi for 6 cylindre. Prøvetidspunkt 10.4. - 11.4.79	$3,8 \cdot 10^4$	$3,8 \cdot 10^4$	$2,7 \cdot 10^4$
Trykstyrke. Middelværdi for 6 cylindre. Prøvetidspunkt 22.8.79	60,9	54,0	31,5
Bøjningstrækstyrke. Middelværdi for 3 bjælker. Prøvetidspunkt 4.5.79	6,4	6,6	3,9

Tabel 2.1. Materialeparametre for beton. Alle størrelser er angivet i N/mm^2 .



Figur 2.2. Forsøgsopstilling

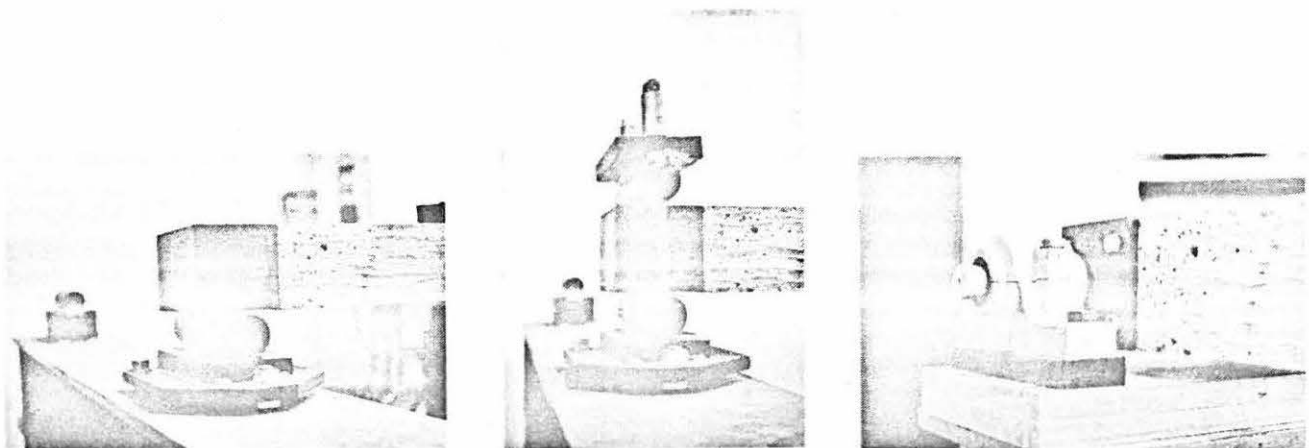
per langs hele understøtningsfladen (-linien). Lejetype 1 er som lejetype 2, blot uden denne justeringsmulighed. Justeringen blev ved lejetype 1 foretaget ved at anbringe tynde stålkiler mellem stålkappen og lejets stålcylinder.

Lejetype 4 består af 2 stk. SKF-kuglelejer, type SNA 506-605. Denne lejetype viste sig ikke at være så velegnet som lejetype 2 og 3, se afsnit 3.3.

Forsøgene omfatter såvel frie som tvungne svingninger.

Ved de frie svingninger bringes jernbetonbjælken ved hjælp af en statisk enkeltkraft påført ved bjælke midten i deformeret tilstand og frigives herfra med begyndelseshastighed lig med nul. Frigørelsen sker ved overklipning af en tråd, idet dette fandtes at være den mest velegnede metode. Ved små påvirkninger er den statiske kraft frembragt ved belastning med stålodder, mens en hydraulisk presse blev benyttet ved de større påvirkninger.

Den lodrette flytning af bjælke midten blev målt ved anvendelse af et accelerometer med tilhørende forforstærker, som elektrisk integrerer accelerationssignalet. Flytningssignalet blev optegnet på en oscillograf.

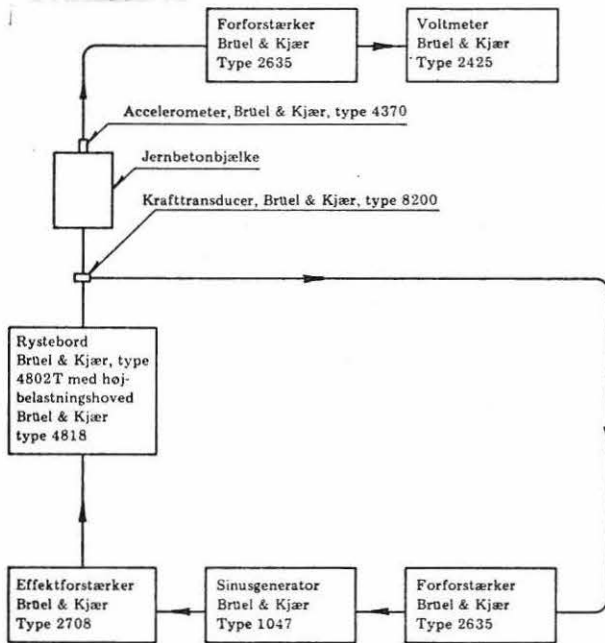


Lejetype 2

Lejetype 3

Lejetype 4

Figur 2.3. Benyttede lejetyper.



Figur 2.4. Skitse af målearrangement ved tvungne svingninger

Ved de tvungne svingninger påførtes en harmonisk virkende lodret enkeltkraft ved bjælkemidten og svarende til stationære svingninger blev flytningsamplituden målt for varierende påtvungne frekvenser, hvorved en resonanskurve kan bestemmes. Målearrangementet fremgår i øvrigt af figur 2.4.

3. MÅLINGER AF FRIE SVINGNINGER

3.1. Undersøgelse af vandindholdets betydning

Ifølge forsøg udført af Cole and Spooner, [10], med små prøvelegemer ($25 \times 6 \times 450$ mm) af cementpasta og cementmørtel, samt større betonprøvelegemer (cirkulært tværsnit med $d = 15$ cm og længde på 275 cm) synes prøvelegemernes indhold af fordampeligt vand at have stor indflydelse på materialedæmpningen for beton. Også prøvelegemernes alder fandtes at have stor betydning. Betydningen af disse parametre fremgår af figur 3.1, hvor tilstand »våd« betegner et helt vandmættet prøvelegeme og tilstand »tør« et prøvelegeme, hvor der ikke er mere fordampeligt vand til stede. Det skal bemærkes, at Cole og Spooner også undersøgte en række andre parametres indflydelse på dæmpningen, men disse havde ikke den helt store betydning.

Som dæmpningsmål er benyttet det logaritmiske dekrement, δ , defineret ved

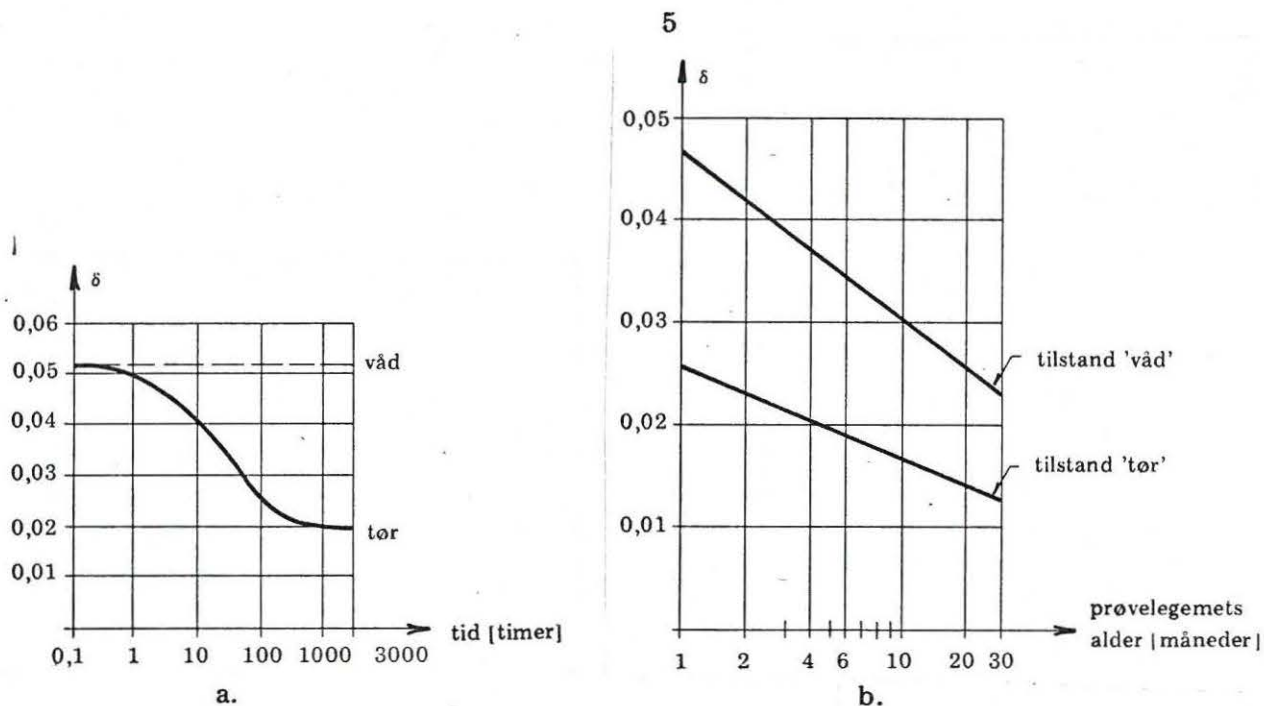
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n} \quad (3.1)$$

hvor x_0 og x_n er henholdsvis udsvinget til tiden $t = 0$ og n svingningstider efter.

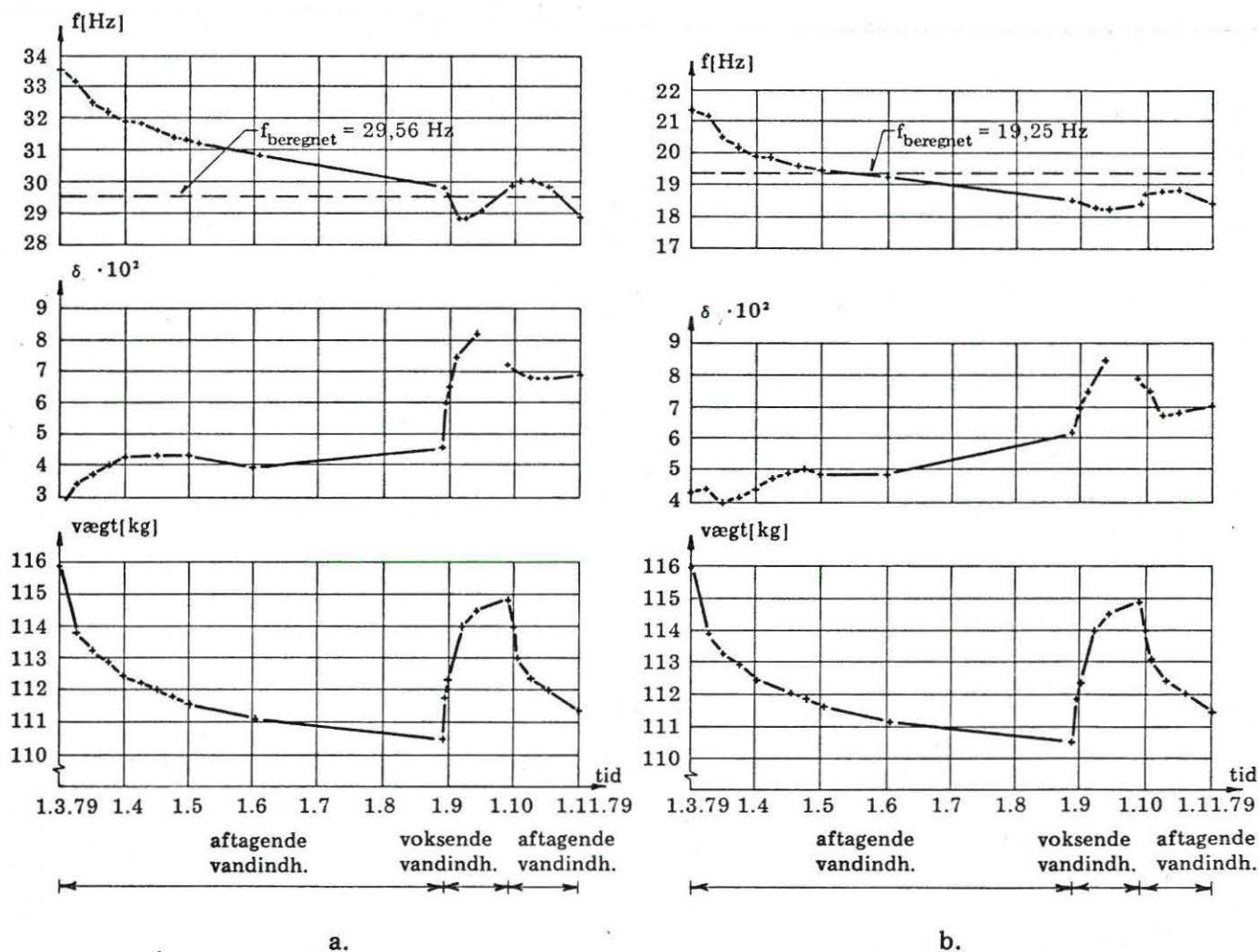
Der foreligger ifølge [10] ingen oplysninger om virkningen af forøget vandindhold efter udtørring, fornyet udtørring osv.

For at undersøge vandindholdets betydning nøjere er forsøg udført med jernbetonbjælke 3, som blev udtørret i perioden 1.3. - 1.9.79, fik forøget vandindhold i perioden 1.9. - 1.10.79, og igen blev udtørret i perioden 1.10. - 1.11.79. Resultatet er vist i figur 3.2, som viser egenfrekvensens, det logaritmiske dekrement og vægtens variation med tiden. Vægtens variation er også et mål for vandindholdets variation. Figur 3.2.a er middelværdier for bjælken understøttet på de to korte sideflader (100 mm) og figur 3.2.b er middelværdier for bjælken understøttet på de to lange sideflader (150 mm).

Disse forsøg er udført ved beskedne udsving. Svarende til figur 3.2.a var maximumflytningen ca. 0,04 mm og svarende til figur 3.2.b ca. 0,15 mm. Sidstnævnte flytning svarer til en flytning for en statisk last på ca. 15% af revnelasten.



Figur 3.1. Variation af logaritmisk dekrement med udtørring og alder. Efter Cole and Spooner, [10].



Figur 3.2. Variation af egenfrekvens, logaritmisk dekrement og vægt af jernbetonbjælke 3. Lejetype 1 og 2.

Som dæmpningsmål er det logaritmiske dekrement ifølge (3.1) benyttet. Det må dog konstateres, at det logaritmiske dekrement viste sig at være svagt afhængig af flytningens størrelse og den angivne værdi er en slags middelværdi målt over et udsvingningsforløb bestående af ca. 50 svingninger.

Egenfrekvensen, f , kan beregnes af

$$f = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{E_s I_{\text{trans}}}{\mu}} \quad (3.2)$$

hvor E_s er betonens begyndelseselasticitetsmodul, se tabel 2.1,

I_{trans} er inertimomentet svarende til urevnet tværsnit,

μ er massen pr. længde og

L er spændvidden.

Svarende til E_s og μ bestemt ved forsøgenes start (1.3.79) er f bestemt ved (3.2) og indtegnet i figur 3.2.

Af figur 3.2.a ses, at de målte egenfrekvenser ligger noget over den beregnede værdi, mens det af figur 3.2.b ses, at den beregnede værdi svarer til en middelværdi af de målte egenfrekvenser.

For aftagende vandindhold (periode 1.3. - 1.9.79) ses, at det logaritmiske dekrement ikke svarer til den af Cole og Spooner i figur 3.1 viste kurve. Som mulig forklaring herpå kan anføres, at der formentlig på grund af dannelsen af svindrevner vil være en tendens til forøget dæmpning, som modsvarer den i figur 3.1 viste tendens til formindsket dæmpning.

For voksende vandindhold (periode 1.9. - 1.10.79) er der derimod en klar tendens til en forøget dæmpning på af størrelsesorden 50 - 100%, altså en ret betydelig stigning.

Ved derpå følgende aftagende vandindhold (periode 1.10. - 1.11.79) synes dæmpningen aftagende. Desværre måtte et sæt forsøgsresultater kasseres, svarende til, at kurverne i figur 3.2 ikke er sammenhængende.

Der er dog for få forsøgsresultater til klart at kunne konkludere om virkningen af dette aftagende vandindhold, se kapitel 5.

3.2. Undersøgelse af revnedannelsens betydning

For jernbetonbjælke 1 og 2 er udført tilsvarende undersøgelser i perioden 1.3. - 1.9.79 som anført i forrige afsnit for jernbetonbjælke 3's vedkommende.

Herudover er jernbetonbjælke 1 og 2 undersøgt for virkningen af at forøge den statiske udgangslast med deraf følgende revnedannelse. Her skal kun resultaterne for jernbetonbjælke 2 anføres.

Understøtningen skete på de lange sideflader (150 mm) og lejetype 3 er benyttet grundet nødvendigheden af, at understøtningen skal kunne optage både op- og nedadrettede påvirkninger.

Som dæmpningsmål er også i dette tilfælde benyttet det logaritmiske dekrement, som viste sig at være stærkt afhængig af flytningens størrelse. Ud fra udsvingskurven for disse frie svingninger er bestemt

$$\delta_{i,i+5} = \frac{1}{5} \ln \frac{x_i}{x_{i+5}} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

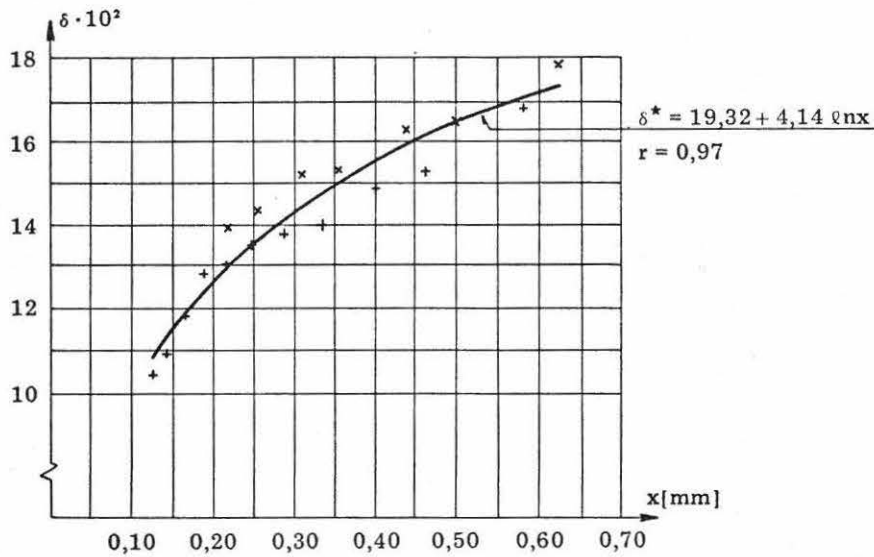
$\delta_{i,i+5}$ knyttes til flytningen x_i og sammenhørende værdier af $\delta_{i,i+5}$ og x_i kan herefter afbildes i et koordinatsystem. Det viste sig, at sammenhængen mellem δ og x passende kan beskrives ved et udtryk af formen

$$\delta^* = 100\delta = A + B \ln x \quad (3.4)$$

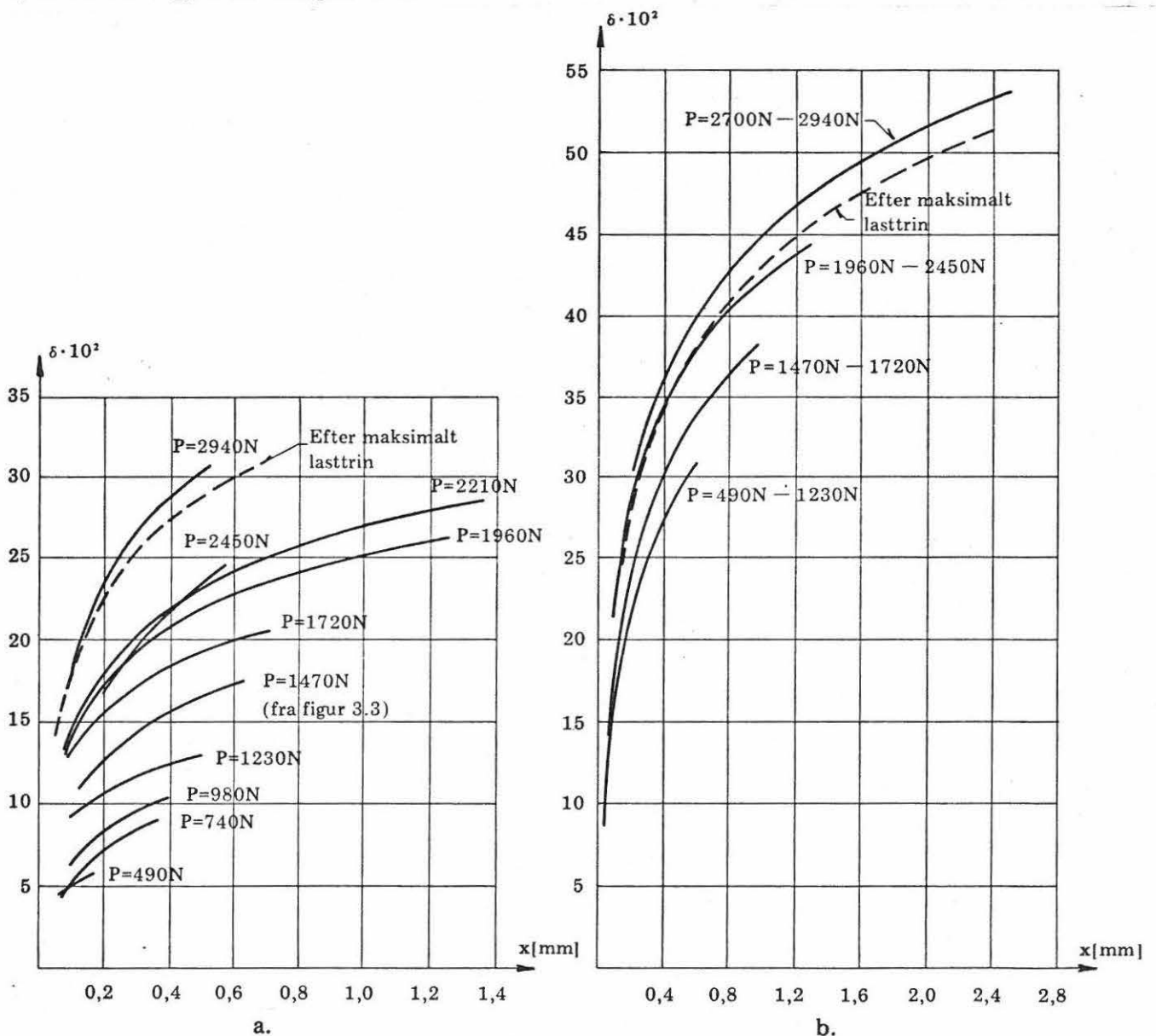
hvor x er udsvinget målt i mm. Konstanterne A og B er bestemt ved mindste kvadraters metode. Et eksempel herpå er vist i figur 3.3, hvor r betegner korrelationskoefficienten og de markerede punkter er målepunkter.

På analog måde er de øvrige lasttrin for den statiske begyndelseslast behandlet, og resultaterne fra de undersøgte lasttrin fremgår af figur 3.4.a og b. Påskriften ved de enkelte kurver svarer til udgangslastens størrelse. Figur 3.4.a svarer til det første af de undersøgte tilfælde og det derpå følgende tilfælde, hvor bjælken er drejet 180° om sin midterakse (længdeakse), er vist i figur 3.4.b.

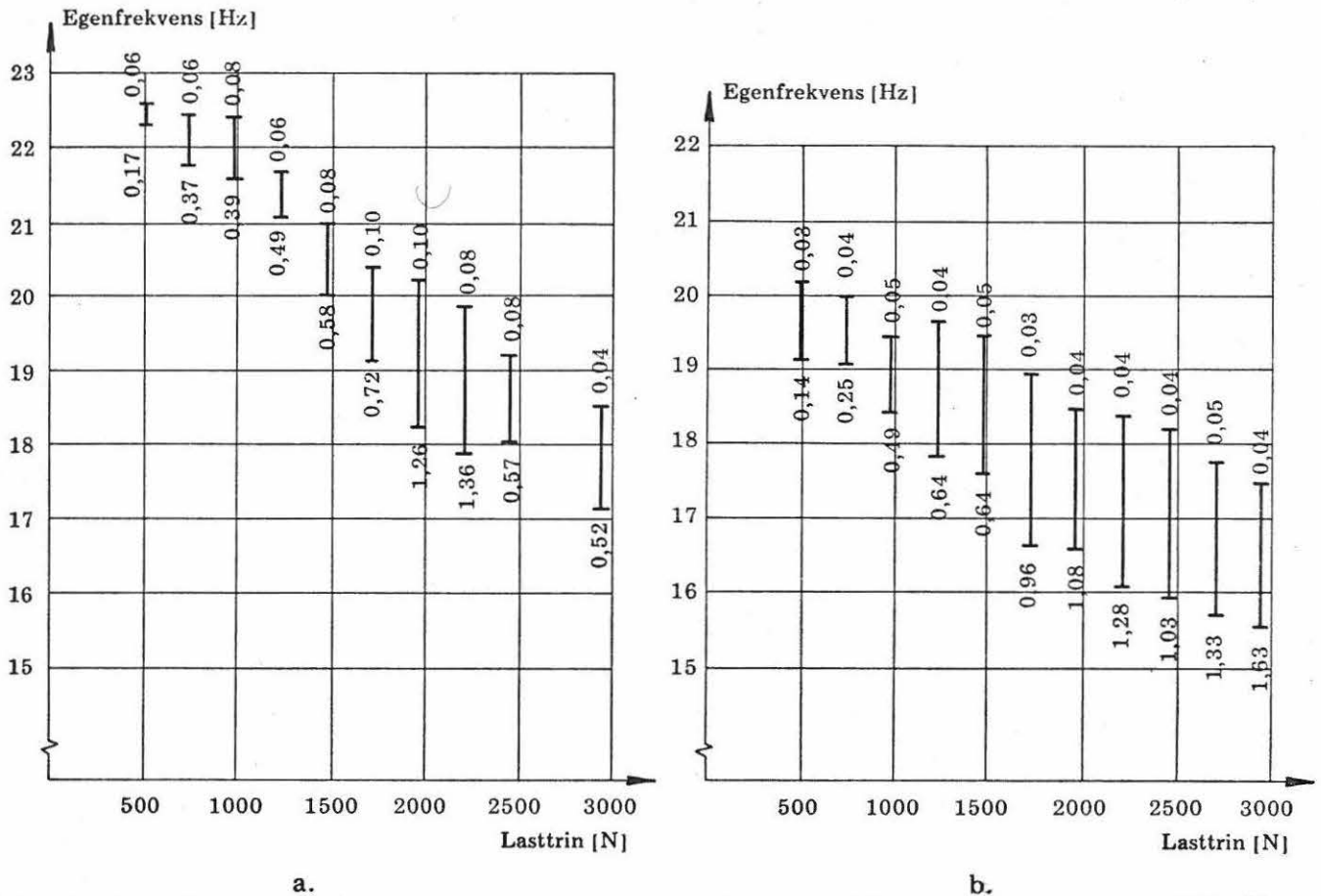
Den beregningsmæssige revnelast er ud fra materialeparametrene angivet i tabel 2.1 bestemt til 1830 N.



Figur 3.3. Jernbetonbjælke 2. Lejetype 3. Sammenhæng mellem logaritmisk dekrement, δ , og flytning, x , for statisk begyndelseslast på 1470N.



Figur 3.4. Jernbetonbjælke 2. Lejetype 3. Sammenhæng mellem logaritmisk dekrement, δ , og flytning, x , ved forskellige værdier for den statiske begyndelseslast.



Figur 3.5. Jernbetonbjælke 2. Lejetype 3. Sammenhæng mellem egenfrekvens, lasttrin og flytning.

Ved forsøgene svarende til figur 3.4.a var der synlig og hørbar revnedannelse ved lasttrin 1720 N og de følgende lasttrin. For forsøgene svarende til figur 3.4.b var det tilsvarende lasttrin 1470 N.

De punkterede kurver i figur 3.4.a og b svarer til forsøg udført efter det maksimale statiske lasttrin på 2940 N.

Svarende til figur 3.4.b, hvor bjælken er revnet både i over- og underside, kan der således konstateres målte logaritmiske dekrementer på op til 0,55.

Også egenfrekvensens variation med lasttrinnets størrelse er undersøgt. Egenfrekvensen bestemt ud fra udsvingskurven er ikke konstant, men aftager for voksende udsving. Egenfrekvensen bestemt ud fra 10 svingninger og knyttet til flytningen for den største af de ti udsving er vist for de undersøgte lasttrin i figur 3.5.a og b. (a. og b. svarer til a. og b. i figur 3.4). De påskrevne tal svarer til dette største udsving i mm.

Af figuren ses, at der er et betydeligt fald i egenfrekvensen for voksende lasttrin svarende til en formindskelse af jernbetonbjælkens bøjningsstivhed.

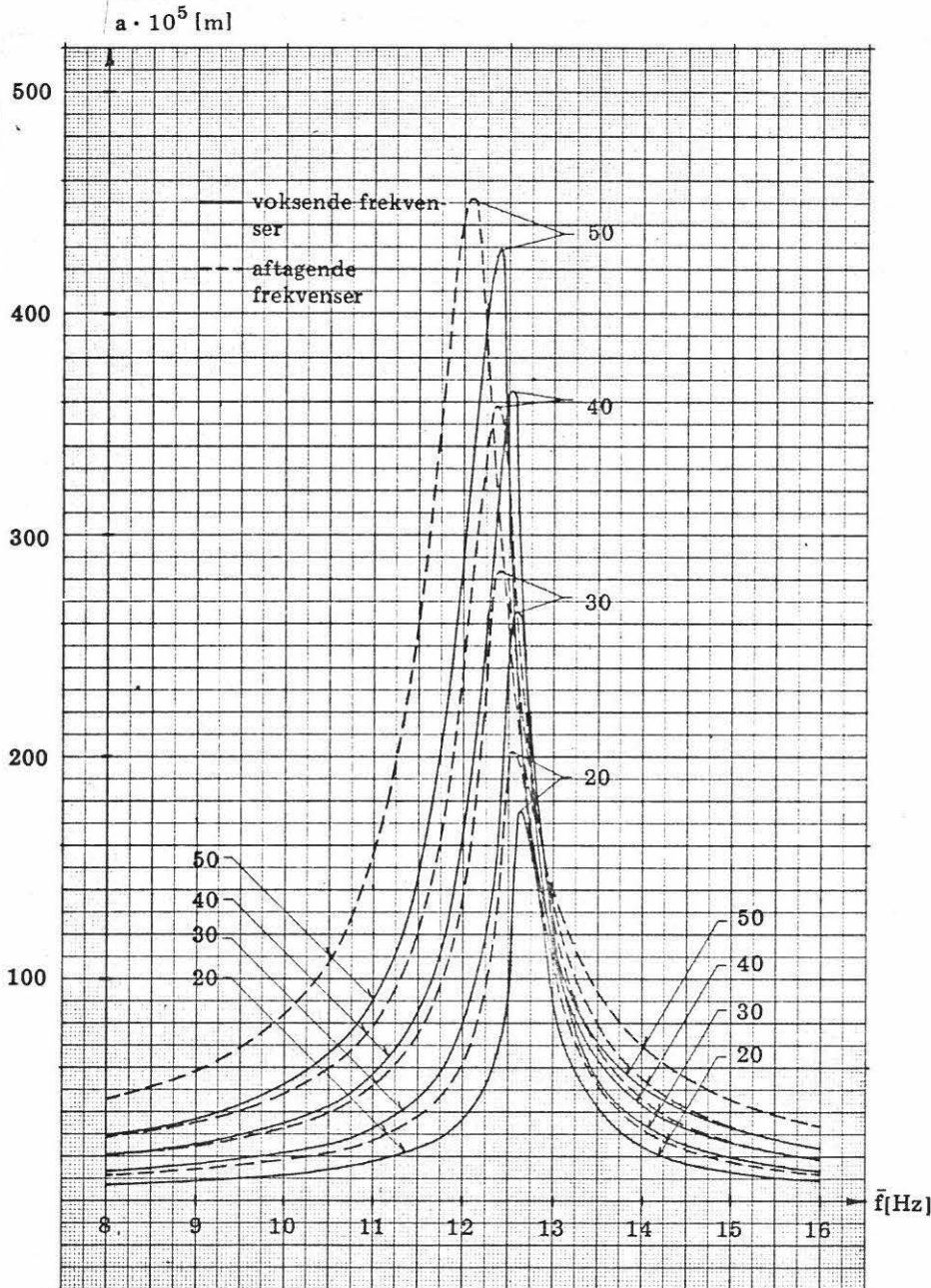
3.3 Undersøgelse af lejer

Som tidligere nævnt er lejerne af stor betydning ved udførelse af dynamiske forsøg. For de anvendte 4 lejetyper fandtes, at lejetype 1, 2 og 3 gav praktisk taget samme værdi for egenfrekvensen, mens lejetype 4 gav en ca. 3% mindre værdi. Lejetype 4 gav til gengæld ca. 15% større værdier for det logaritmiske dekrement end de øvrige lejetyper. Lejetype 2 og 3 anses derfor for at være de bedst egnede.

4. MÅLINGER AF TVUNGNE SVINGNINGER

Som omtalt i afsnit 2 er forsøg med tvungne svingninger også udført. Her skal kun omtales nogle få forsøg med jernbetonbjælke 3, idet der i øvrigt henvises til [1] og [2]. Forsøgene er udført d. 21. og 22.11.79 og jernbetonbjælken har således været udsat for den i afsnit 3.1 beskrevne påvirkning. Herudover har jernbetonbjælken været udsat for forudgående tvungne svingninger, hvor maximumflytningen ved bjælkemidten har været større end 10 mm, svarende til mere end det dobbelte af de her refererede forsøg, se følgende figur 4.1.

Kun forsøgene svarende til grundsvingningen skal omtales her, og da resonanskurven udviste ikke-lineære træk, er det valgt at beskrive svingningen ved Duffings ligning med dæmpning. Den styrende differentialligning svarende til grundsvingningen er således



Figur 4.1. Jernbetonbjælke 3. Lejetype 3. Resonanskurver for kraftamplituder $P_0 = 20 - 30 - 40 - 50$ N. (Tallene ved kurverne angiver P_0 i N.) Voksende og aftagende påtrykte frekvenser.

$$M\ddot{x} + 2M\zeta\omega\dot{x} + M\omega^2 x(1 + \alpha x^2) = P_0 \cos(\bar{\omega}t + \theta) \quad (4.1)$$

med en skønnet løsning på

$$x = a \cos \bar{\omega}t \quad (4.2)$$

I (4.1) indgår 4 parametre - M , ζ , ω og α - som bestemmes ved kurvetilpasning ud fra de eksperimentelt bestemte punktpar (\bar{f}, a) på resonanskurven. P_0 er kraftamplituden og $\bar{\omega}$ er den påtrykte cykliske frekvens. ($\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$).

Flytningsamplituden a i (4.2) er bestemt ved følgende 3. grads ligning i a^2 :

$$((\omega^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{3}{4}\alpha a^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 \bar{\omega}^2 = \frac{P_0^2}{M^2 a^2} \quad (4.3)$$

I figur 4.1 er vist de ud fra kurvetilpasningen bestemte resonanskurver for kraftamplituder $P_0 = 20 - 30 - 40 - 50$ N. Forsøgene er foretaget i nævnte rækkefølge, og for hver kraftamplitude er bestemt dels resonanskurven for voksende frekvenser (de fuldt optrukne kurver) og dels resonanskurven for aftagende frekvenser (de punkterede kurver).

De ud fra kurvetilpasningen bestemte værdier for de 4 parametre er anført i tabel 4.1.

voksende/ aftagende påtrykte frekvenser	kraftampli- tude P_0 [N]	f [Hz]	M [kg]	α [m ⁻²]	ζ
voks.	20	12,84	65,41	$-1,37 \cdot 10^4$	$1,35 \cdot 10^{-2}$
aft.	20	12,72	45,12	$-8,79 \cdot 10^3$	$1,73 \cdot 10^{-2}$
voks.	30	12,65	59,24	$-1,01 \cdot 10^3$	$1,50 \cdot 10^{-2}$
aft.	30	12,51	41,00	$-2,40 \cdot 10^3$	$2,09 \cdot 10^{-2}$
voks.	40	12,40	55,06	$2,41 \cdot 10^3$	$1,61 \cdot 10^{-2}$
aft.	40	12,31	40,43	$9,98 \cdot 10^2$	$2,30 \cdot 10^{-2}$
voks.	50	12,17	50,82	$2,91 \cdot 10^3$	$1,92 \cdot 10^{-2}$
aft.	50	11,98	34,16	$1,24 \cdot 10^3$	$2,83 \cdot 10^{-2}$

Tabel 4.1. Jernbetonbjælke 3. Lejetype 3. Parametre f , M , α og ζ bestemt ved kurvetilpasning

5. AFSLUTTENDE BEMÆRKNINGER

Som det fremgår af foranstående er der for de her omtalte forsøg tale om indledende eksperimentelle undersøgelser. Yderligere undersøgelser er nødvendige, og for tiden undersøges det i afsnit 3.1 anførte forhold vedrørende vandindholdets betydning nøjere på 2 armerede og 2 uarmerede betonbjælker. Endvidere påtænkes i nær fremtid udført forsøg, hvor jernbetonbjælker placeres udendørs og hvor virkningen af vejrligets påvirkning vil blive undersøgt.

Herudover vil flere forsøg med tvungne svingninger blive udført tillige med sammenligninger mellem frie og tvungne svingninger.

6. REFERENCEFORTEGNELSE

- [1] Jernbetons dynamiske opførsel - Del 3 - Forsøg. L. Pilegaard Hansen. Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. Rapport nr. 7908, november 1979.
- [2] Jernbetons dynamiske opførsel - Del 4 - Forsøg med tvungne svingninger. L. Pilegaard Hansen. Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. Rapport nr. 7909, december 1979.

- [3] Erwin Bock: Über den dynamischen Elastizitätsmodul und die Dämpfung von Betonbalken verschiedener Bewehrung bei Biege- und Längsschwingungen. Diss. Berlin 1939.
- [4] Erwin Bock: Verhalten von Beton- und Stahlbetonbalken bei Biegeschwingungen. VDI-Zeitschrift, Bd. 86, Nr. 9/10, 1942, pp. 145 - 147.
- [5] Joseph Penzien and Robert J. Hansen: Static and Dynamic Behavior of Reinforced Concrete Beams. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 25, No. 7, 1954, pp. 545 - 567.
- [6] Harald Lenk: Über das Schwingungsverhalten von Spannbeton- und Stahlbetonbalken. Diss. Stuttgart, 1964.
- [7] Merlin L. James, Loren D. Lutes and Gerald M. Smith: Dynamic Properties of Reinforced and Prestressed Concrete Structural Components. Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, Vol. 61, No. 11, 1964, pp. 1359 - 1381.
- [8] R. Dieterle und H. Bachmann: Versuche über den Einfluss der Rissbildung auf die dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- und Betonbalken. Nr. 7501-1 der Versuchsberichte des Institutes für Baustatik und Konstruktion, ETH, Zürich, Dezember 1979.
- [9] Jernbetons dynamiske opførsel - Del 1. L. Pilegaard Hansen. Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. Rapport nr. 7907, november 1979.
- [10] D. G. Cole and D. C. Spooner: The Damping Capacity of Concrete. Proceedings of an International Conference, London, September 1965: The Structure of Concrete and its Behaviour under Load. Cement and Concrete Association, pp. 217 - 225.